

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В. К. Манжосов

РАСЧЕТ ТРЕХШАРНИРНЫХ АРОК

Методические указания

Ульяновск
2010

УДК 624.04(076)

ББК 38.121я7

М 23

Рецензент канд. техн. наук, доцент А. Н. Черный

Одобрено секцией методических пособий научно-методического совета университета

Манжосов, В. К.

М 23 Расчет трехшарнирных арок : методические указания. – Ульяновск : УлГТУ, 2010. – 36 с.

Составлены в соответствии с учебными программами по дисциплине «Строительная механика» для направления «Строительство». Методические указания предназначены для выполнения расчетно-проектировочных и контрольных заданий, предусмотренных рабочими программами по дисциплине.

Работа подготовлена на кафедре теоретической и прикладной механики.

УДК 624.04(076)
ББК 38.121я7

Учебное издание

МАНЖОСОВ Владимир Кузьмич

РАСЧЕТ ТРЕХШАРНИРНЫХ АРОК

Методические указания

Редактор М. В. Теленкова

Подписано в печать 01.10.2010. Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 2,09.

Тираж 100 экз. Заказ 1040.

Ульяновский государственный технический университет,
432027, Ульяновск, Сев. Венец, 32.

Типография УлГТУ, 432027, Сев. Венец, 32

© Манжосов В. К., 2010.

© Оформление. УлГТУ, 2010

СОДЕРЖАНИЕ

РАСЧЕТ ТРЕХШАРНИРНЫХ АРОК	4
1. Основные положения.....	4
2. Пример расчета трехшарнирной арки.....	13
2.1. Задание для расчета.....	13
2.2. Кинематический анализ.....	14
2.3. Определение реакций в опорах арки	14
2.4. Определение внутренних силовых факторов в поперечных сечениях арки. Построение эпюр продольных сил, поперечных сил и изгибающих моментов.....	15
2.4.1. Определение внутренних силовых факторов в вертикальных сечениях арки. Построение эпюр продольных сил, поперечных сил и изгибающих моментов.....	15
2.4.2. Определение внутренних силовых факторов в поперечных сечениях арки. Построение эпюр продольных сил, поперечных сил и изгибающих моментов.....	19
2.5. Линии влияния опорных реакций	22
2.6. Линии влияния продольной силы, поперечной силы и изгибающего момента для заданного сечения арки.....	23
2.7. Определение усилий по линиям влияния и сопоставление с аналитическими данными.....	29
2.7.1. Определение реакций опор по линиям влияния.....	29
2.7.2. Определение по линиям влияния значений продольной силы, поперечной силы и изгибающего момента в заданном сечении.....	30
РЕКОМЕНДУЕМЫЙ СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	33
ПРИЛОЖЕНИЕ	34

РАСЧЕТ ТРЕХШАРНИРНЫХ АРОК

1. Основные положения

Основные понятия. *Арочными* называются системы криволинейного (рис. 1.1, а) или ломаного (рис. 1.1, б) очертания, в опорах которых от вертикальной нагрузки возникают наклонные реакции, направленные, как правило, внутрь пролета. Горизонтальная составляющая такой реакции называется *распором*.

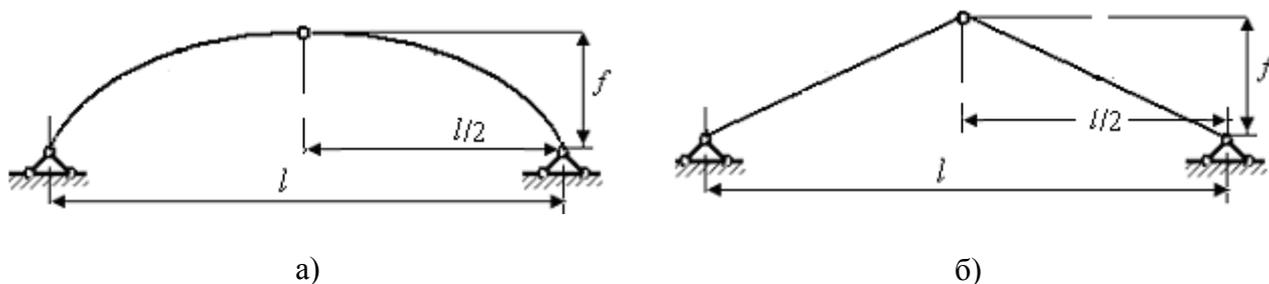


Рис. 1.1. Трехшарнирная арочная система

Пролетом арки l называют расстояние между опорными вертикалями. *Стрелой подъема* арки f называют расстояние от наиболее удаленной точки оси арки (ключевого шарнира) до линии, соединяющей центры опор.

Геометрически неизменяемость системы. Трехшарнирная арочная система является геометрически неизменяемой системой. Для того, чтобы образованная стержневая система была геометрически неизменяема, необходимо, чтобы число степеней свободы w системы было равно нулю. Число степеней свободы w стержневой системы, состоящей из n стержней, соединенных с помощью p шарниров, и имеющей C_0 опорных стержней, можно определить как

$$w = 3n - 2p - C_0. \quad (1.1)$$

Тогда при $w = 0$ общее число опорных стержней C_0 должно соответствовать равенству

$$C_0 = 3n - 2p. \quad (1.2)$$

Для двух стержней арки ($n = 2$), соединяемых одним шарниром ($p = 1$), число опорных стержней

$$C_0 = 3n - 2p = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 4.$$

Заметим, что шарнирно-неподвижная опора эквивалентна двум опорным стержням и шарнирно-подвижная опора – одному опорному стержню.

Встречаются стержневые арочные системы, когда два соединяемых стержня помимо ключевого шарнира скреплены еще одним стержнем (рис. 1.2).

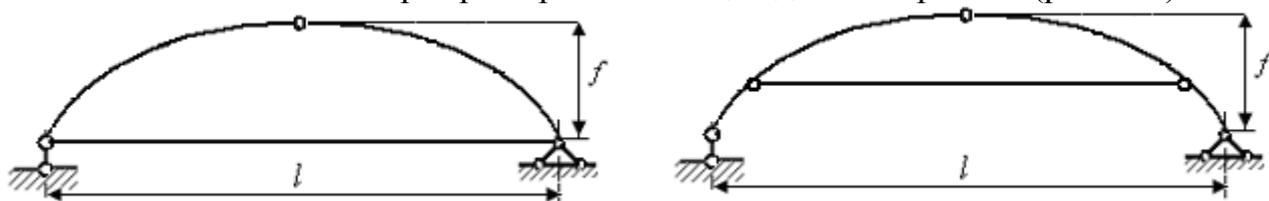


Рис. 1.2. Трехшарнирная арка с затяжкой

Такие арочные системы называются трехшарнирной аркой с затяжкой. Обратим внимание на то, что для трехшарнирной арки с затяжкой (когда $n = 3$, $p = 3$) число опорных стержней из (1.2) равно

$$C_0 = 3n - 2p = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 = 3.$$

Стержень, осуществляющий затяжку, испытывает нагрузку только со стороны стягиваемых стержней и работает только на растяжение.

Статическая определимость системы. При разделении трехшарнирной арочной системы на n составных стержней мы можем составить $3n$ уравнений равновесия (по три для каждого стержня). Число неизвестных реакций связей при этом будет равно числу опорных стержней C_0 плюс $2p$ реакций связей (по две на каждое шарнирное соединение) при разделении трехшарнирной арочной системы в шарнирных соединениях.

Для определения неизвестных реакций необходимо, чтобы число уравнений равновесия было равно числу неизвестных:

$$3n = C_0 + 2p. \quad (1.3)$$

Так как для геометрически неизменяемой трехшарнирной арки из (1.2) это условие обеспечивается, то поставленная задача по определению опорных реакций разрешима и трехшарнирная арка является статически определимой системой.

Определение реакций в опорах арки. При действии внешней нагрузки на трехшарнирную арку (рис. 1.3) в ее опорах возникают неизвестные реакции: в шарнирно неподвижной опоре эту реакцию можно представить в виде двух составляющих, в шарнирно подвижной опоре – в виде одной составляющей.

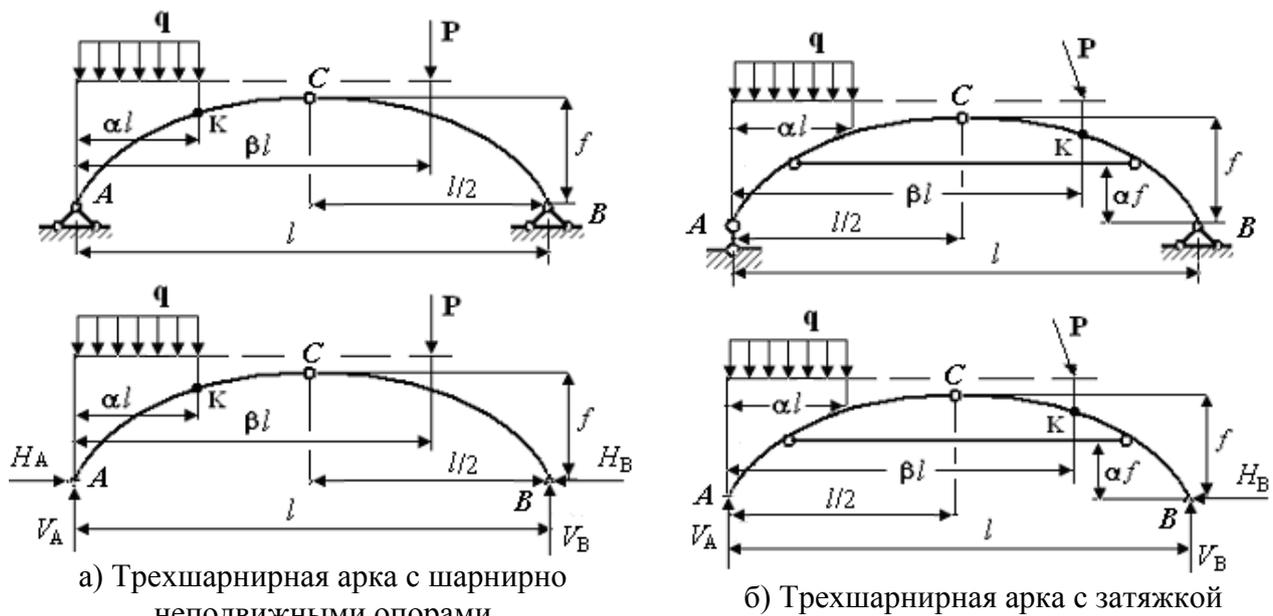


Рис. 1.3. Схема внешней нагрузки на арку и реакции, возникающие в опорах

При определении опорных реакций для плоской системы сил можно использовать три уравнения равновесия. В трехшарнирной арке с двумя неподвижными опорами (рис. 1.3, а) неизвестных реакций четыре: V_A, H_A, V_B, H_B .

Для определения неизвестных реакций V_A, H_A, V_B, H_B вначале составляем для всей системы (рис. 1.3, а) три уравнения равновесия в виде равенства нулю суммы проекций всех сил на ось x ($\sum P_{ix} = 0$), в виде равенства нулю суммы моментов всех сил относительно точки A ($\sum M_A(P_i) = 0$), в виде равенства нулю суммы моментов всех сил относительно точки B ($\sum M_B(P_i) = 0$).

Далее целесообразно систему разделить на составные стержни (рис. 1.4) и рассмотреть равновесие либо левого, либо правого стержня в виде равенства нулю суммы моментов сил, действующих на стержень, относительно точки C ($\sum M_C(P_i) = 0$).

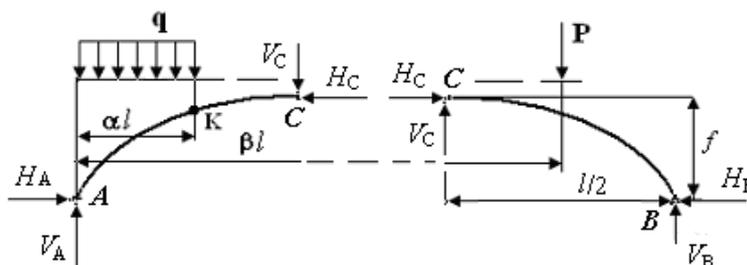


Рис. 1.4. Схема разделения трехшарнирной арки на составные стержни

В трехшарнирной арке с затяжкой (рис. 1.3, б) неизвестных реакций три: V_A, V_B, H_B . Для определения неизвестных реакций V_A, V_B, H_B достаточно три уравнения равновесия в виде равенства нулю суммы проекций всех сил на ось x ($\sum P_{ix} = 0$), в виде равенства нулю суммы моментов всех сил относительно точки A ($\sum M_A(P_i) = 0$), в виде равенства нулю суммы моментов всех сил относительно точки B ($\sum M_B(P_i) = 0$).

Однако при определении внутренних силовых факторов в поперечных сечениях, расположенных выше стержня, обеспечивающего затяжку, с использованием метода сечений необходимо знать силы, с которыми стержень-затяжка действует на стержни арки. Для их определения следует отбросить стержень-затяжку и заменить его действие неизвестными реакциями H (рис. 1.5).

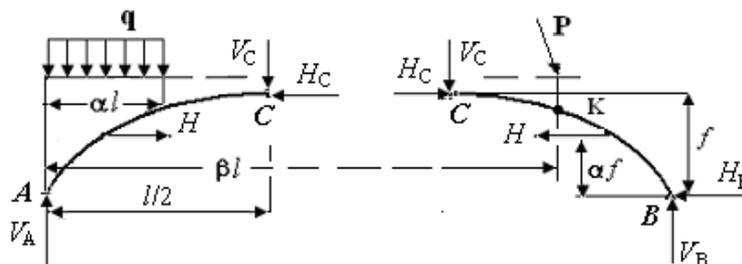


Рис. 1.5. Схема разделения трехшарнирной арки с затяжкой на составные стержни

Далее, разделив арку по шарниру C , следует рассмотреть условия равновесия либо левой, либо правой части в виде равенства нулю суммы моментов всех сил, действующих на левый или правый стержень, относительно точки C ($\sum M_C(P_i) = 0$).

Например, для схемы на рис. 1.5 можно составить условие равновесия левой части:

$$\sum M_C(P_i) = 0, \quad -V_A \cdot l/2 + H \cdot h_H + qal \cdot h_q = 0, \quad (1.4)$$

где $h_H = f - \alpha f$ – плечо силы H относительно моментной точки C , $h_q = l/2 - \alpha l/2$ – плечо равнодействующей qal распределенных сил относительно моментной точки C .

Из уравнения (1.4) находим H : $H = (V_A \cdot l/2 - qal \cdot h_q) / h_H$.

После определения неизвестных реакций можно приступить к определению внутренних силовых факторов в поперечных сечениях стержней арки.

Положение поперечного сечения. Линия оси арки. При определении внутренних силовых факторов в поперечных сечениях стержней арки важно знать положение поперечного сечения в любой точке оси арки. Поперечное сечение $v-v$ в произвольной точке оси арки перпендикулярно касательной $u-u$ в этой точке (рис. 1.6) и расположено под углом φ к вертикальному сечению. Касательная $u-u$ составляет с осью x угол, равный φ .

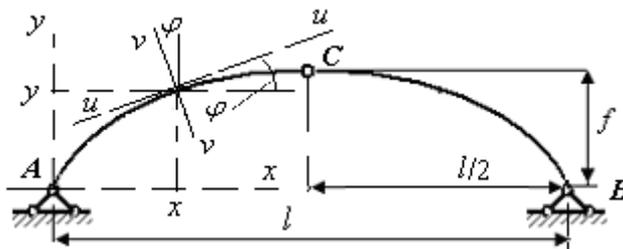


Рис. 1.6. Схема, показывающая положение произвольного поперечного сечения арки

Таким образом, положение поперечного сечения на оси арки определяется координатами x и y его центра тяжести и углом φ . Так как угол φ есть угол наклона касательной в данной точке оси арки, то этот угол можно определить, взяв первую производную функции $y = F(x)$, описывающей линию оси арки, и используя известное равенство: $\text{tg } \varphi = y'$.

Возникает необходимость нахождения функции $y = F(x)$. Рассмотрим некоторые случаи.

1. Линия оси арки – участок параболы с вершиной в точке C .

В этом случае линия оси арки описывается функцией

$$y = ax^2 + bx + c, \quad (1.5)$$

а ее производная

$$y' = 2ax + b, \quad (1.6)$$

где a, b, c – неизвестные коэффициенты.

Эти коэффициенты определим из следующих равенств (рис. 1.6):

при $x = 0 \quad y = 0$, откуда из (1.5) следует, что $c = 0$;

при $x = l/2 \quad y' = 0$, откуда из (1.6) следует, что $b = -al$;

при $x = l/2 \quad y = f$, откуда из (1.5) следует, что

$$f = a(l/2)^2 + bl/2; \quad f = a(l/2)^2 - al^2/2; \quad \text{откуда } a = -\frac{4f}{l^2}.$$

Итак, если линия оси арки это участок параболы и арка соответствует схеме на рис. 1.6, то из (1.5) и (1.6) с учетом значений коэффициентов получим

$$y = \frac{4f}{l^2}(l-x)x; \quad y' = \frac{4f}{l^2}(l-2x). \quad (1.7)$$

2. Линия оси арки – дуга окружности радиуса R , когда точка C и центр окружности (точка O) расположены на одной вертикали (рис. 1.7).

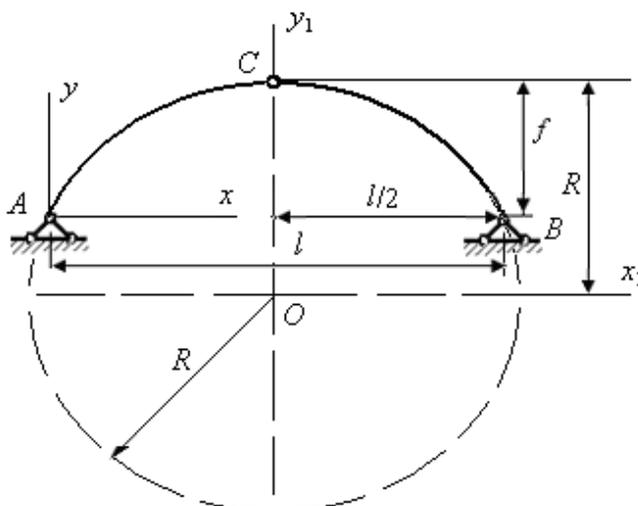


Рис. 1.7. Схема трехшарнирной арки, когда линия оси арки – дуга окружности

В системе координат $y_1 - x_1$ окружность описывается уравнением

$$y_1^2 + x_1^2 = R^2. \quad (1.8)$$

Для перехода к координатам y и x используем соотношения

$$y_1 = y + (R - f), \quad x_1 = x - l/2. \quad (1.9)$$

Из (1.8) с учетом, что для арки $y_1 > 0$, следует $y_1 = \sqrt{R^2 - x_1^2}$.

Подставляя (1.9), получим

$$y + (R - f) = \sqrt{R^2 - (x - l/2)^2}, \quad y = \sqrt{R^2 - (x - l/2)^2} - (R - f), \quad (1.10)$$

$$y' = \frac{l/2 - x}{\sqrt{R^2 - (x - l/2)^2}}. \quad (1.11)$$

Для схемы, представленной на рис. 1.7, радиус окружности R , длина пролета l и стрела подъема f связаны соотношением

$$R = \frac{f^2 + (l/2)^2}{2f} = \frac{f}{2} + \frac{l^2}{8f}. \quad (1.12)$$

3. Линия оси арки – прямая линия (рис. 1.8).

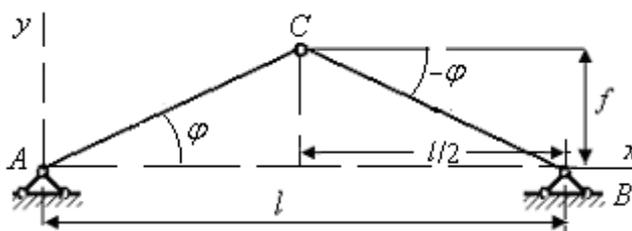


Рис. 1.8. Схема трехшарнирной системы, когда линия оси – прямая линия

На участке $0 \leq x \leq l/2$ уравнение прямой AC имеет вид

$$y = kx, \quad y' = k, \quad 0 \leq x \leq l/2, \quad (1.13)$$

где $k = \operatorname{tg} \varphi$ – угловой коэффициент, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{f}{l/2}$, $k = \frac{f}{l/2}$.

На участке $l/2 \leq x \leq l$ уравнение прямой CB имеет вид

$$y = f - k(x - l/2), \quad y' = -k, \quad l/2 \leq x \leq l. \quad (1.14)$$

Определение внутренних силовых факторов в поперечных сечениях.

Пусть мы имеем схему арки (рис. 1.9), у которой определены реакции в опорах, известно уравнение линии оси арки и для любой точки этой линии с координатами x и y известно положение поперечного сечения $v-v$, определяемое углом φ .

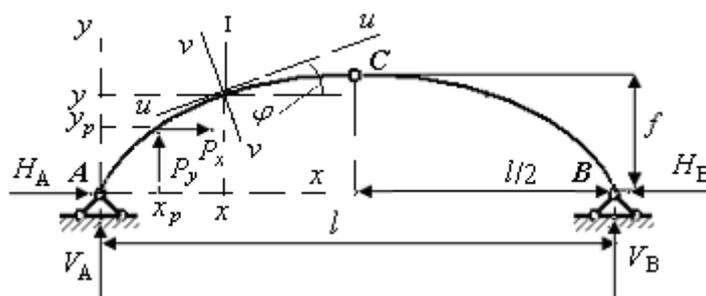


Рис. 1.9. Схема трехшарнирной арки

Пусть в некоторой точке с координатами x_p и y_p действуют составляющие силы P : P_x и P_y .

Вначале определим внутренние силовые факторы N_0 , Q_0 , M_0 в вертикальном сечении I (N_0 – продольная сила, Q_0 – поперечная сила, M_0 – изгибающий момент).

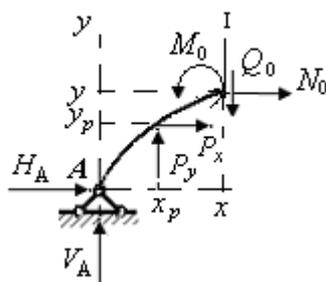


Рис. 1.10. Схема определения внутренних сил в вертикальном сечении I

Если заданные силы и реакции в опорах представлены на расчетной схеме в виде вертикальных и горизонтальных составляющих, то для определения внутренних силовых факторов в вертикальном сечении I можно использовать схемы положительных слагаемых, представленных на рис. 1.11 для левой отсеченной части арки.

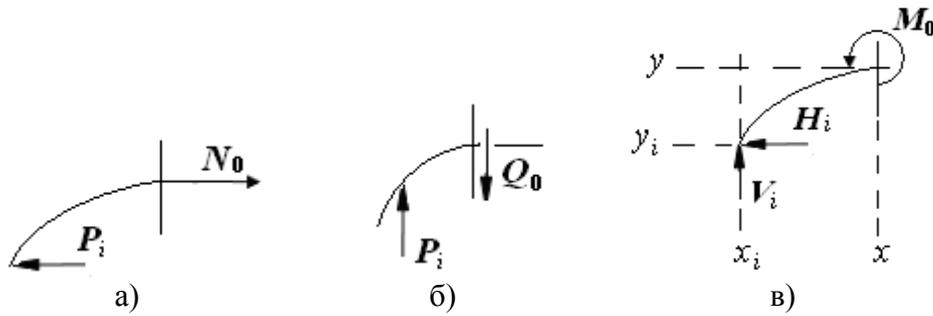


Рис. 1.11. Схемы положительных слагаемых левой отсеченной части арки при составлении выражений для внутренних силовых факторов в вертикальном сечении арки

Если сила P_i (рис. 1.11, а) направлена от вертикального сечения, то она входит положительным слагаемым в выражение для продольной силы N_0 .

Если сила P_i (рис. 1.11, б) направлена вверх, то она входит положительным слагаемым в выражение для поперечной силы Q_0 .

Если вертикальные или горизонтальные составляющие силы стремятся повернуть отсеченную часть арки по часовой стрелке относительно точки с координатами x и y , то моменты этих сил относительно этой точки входят положительными слагаемыми в выражение для изгибающего момента M_0 :

$$M_0 = V_i(x - x_i) + H_i(y - y_i). \quad (1.15)$$

Если возвратиться к схеме, представленной на рис. 1.10, то для вертикального сечения I с использованием схем положительных слагаемых (рис. 1.11) можно составить следующие выражения для внутренних силовых факторов:

$$N_0 = -H_A - P_x, \quad Q_0 = V_A + P_y, \quad (1.16)$$

$$M_0 = V_A(x - x_A) + P_y(x - x_p) - H_A(y - y_A) - P_x(y - y_p). \quad (1.17)$$

После того, как определены внутренние силовые факторы в вертикальном сечении I, можно перейти к определению внутренних силовых факторов в поперечном сечении $v-v$ арки, повернутом относительно вертикального сечения на угол φ .

Рассмотрим схему внутренних силовых факторов в вертикальном сечении I (рис. 1.12, а).

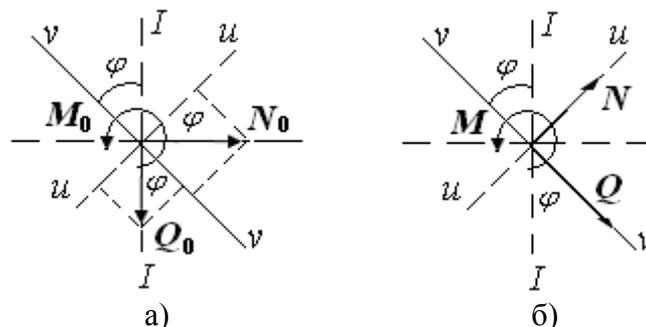


Рис. 1.12. Схемы внутренних силовых факторов в вертикальном сечении I и поперечном сечении арки

Продольная сила N в поперечном сечении $v-v$ арки (рис. 1.12, б) равна сумме проекций сил в вертикальном сечении I (рис. 1.12, а) на нормаль $u-u$:

$$N = \sum P_{ui} = N_0 \cos \varphi - Q_0 \sin \varphi. \quad (1.18)$$

Поперечная сила Q в поперечном сечении $v-v$ арки (рис. 1.12, б) равна сумме проекций сил в вертикальном сечении I (рис. 1.12, а) на поперечное сечение $v-v$:

$$Q = \sum P_{vi} = Q_0 \cos \varphi + N_0 \sin \varphi. \quad (1.19)$$

Изгибающий момент M в поперечном сечении $v-v$ арки равен изгибающему моменту M_0 в вертикальном сечении I , если при определении момента M_0 были учтены моменты горизонтальных составляющих сил:

$$M = M_0. \quad (1.20)$$

Линии влияния различных факторов.

Линией влияния какого-либо фактора называется график, изображающий изменение этого фактора в зависимости от положения единичной силы при перемещении ее по сооружению.

Изобразим трехшарнирную арку и единичную силу, перемещение которой определяется координатой x (рис. 1.13). Начало координатной оси совмещено с точкой A .

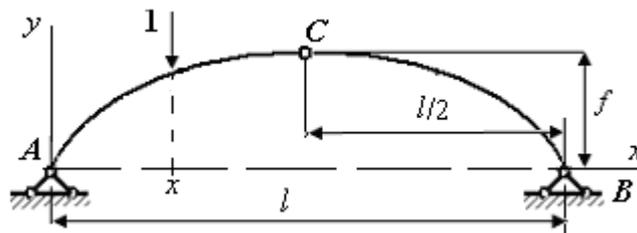


Рис. 1.13. Схема трехшарнирной арки и единичной силы, перемещающейся по арке

Линии влияния опорных реакций. При действии единичной силы в опорах возникают опорные реакции V'_A, H'_A, V'_B, H'_B (рис. 1.14).

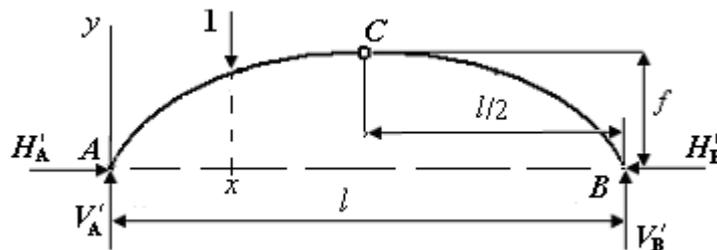


Рис. 1.14. Схема трехшарнирной арки и опорных реакций от действия единичной силы

Используя уравнение равновесия в виде равенства нулю суммы моментов сил относительно точки B ($\sum M_B(P_i) = 0$), находим

$$-V'_A \cdot l + 1 \cdot (l - x) = 0, \text{ откуда } V'_A = 1 - x/l. \quad (1.21)$$

Выражение (1.21) описывает линию влияния опорной реакции V'_A .

Используя уравнение равновесия в виде равенства нулю суммы моментов сил относительно точки A ($\sum M_A(P_i) = 0$), находим

$$V'_B \cdot l - 1 \cdot x = 0, \text{ откуда } V'_B = x/l. \quad (1.22)$$

Выражение (1.22) описывает линию влияния опорной реакции V'_B .

Разделив арку по шарниру C , рассмотрим условия равновесия левой части в виде равенства нулю суммы моментов всех сил, действующих на левый стержень, относительно точки C ($\sum M_C(P_i) = 0$):

при перемещении единичной силы по стержню AC

$$-V'_A \cdot l/2 + 1 \cdot (l/2 - x) + H'_A \cdot f = 0, \quad 0 \leq x \leq l/2,$$

при перемещении единичной силы по стержню CB

$$-V'_A \cdot l/2 + H'_A \cdot f = 0, \quad l/2 \leq x \leq l.$$

Из данных уравнений следует, что

$$H'_A = \frac{V'_A \cdot l/2 - 1 \cdot (l/2 - x)}{f}, \quad 0 \leq x \leq l/2, \quad (1.23)$$

$$H'_A = \frac{V'_A \cdot l/2}{f}, \quad l/2 \leq x \leq l. \quad (1.24)$$

Выражения (1.23) и (1.24) описывают линию влияния опорной реакции H'_A .

Из уравнения равновесия в виде суммы проекций сил на ось x (рис. 1.14), следует

$$H'_A - H'_B = 0, \quad \text{откуда } H'_B = H'_A. \quad (1.25)$$

Линии влияния внутренних силовых факторов в заданном сечении. При перемещении единичной силы по арке в поперечных сечениях арки возникают внутренние силы: продольные силы N' , поперечные силы Q' , изгибающие моменты M' . Рассмотрим последовательность определения N'_k , Q'_k , M'_k в поперечном сечении, пересекающем ось арки в точке K (рис. 1.15).

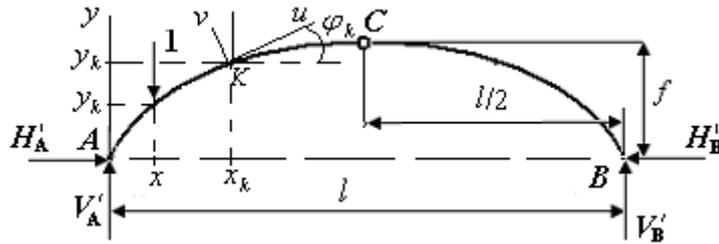


Рис. 1.15. Схема трехшарнирной арки и положения заданного поперечного сечения

Координаты точки K равны x_k и y_k . Нормаль к поперечному сечению составляет с горизонтальной линией угол φ_k .

Для определения N'_k , Q'_k , M'_k в поперечном сечении, пересекающем ось арки в точке K , воспользуемся уравнениями (1.18) и (1.19) в виде

$$N'_k = N'_{k0} \cos \varphi_k - Q'_{k0} \sin \varphi_k, \quad (1.26)$$

$$Q'_k = Q'_{k0} \cos \varphi_k + N'_{k0} \sin \varphi_k, \quad (1.27)$$

$$M'_k = M'_{k0}, \quad (1.28)$$

где N'_{k0} , Q'_{k0} – продольная и поперечная силы в вертикальном сечении точки K , возникающие от действия единичной силы при перемещении ее по арке; M'_{k0} – изгибающий момент в вертикальном сечении точки K , возникающий от действия единичной силы при перемещении ее по арке.

Внутренние силы N'_{k0} , Q'_{k0} и M'_{k0} в вертикальном сечении точки K определим, используя схему положительных слагаемых на рис. 1.11:

$$N'_{k0} = -H'_A, \quad Q'_{k0} = \begin{cases} V'_A - 1, & x_A \leq x \leq x_k, \\ V'_A, & x_k \leq x \leq l, \end{cases} \quad (1.29)$$

$$M'_{k0} = \begin{cases} V'_A \cdot (x_k - x_A) - H'_A \cdot (y_k - y_A) - 1 \cdot (x_k - x), & x_A \leq x \leq x_k, \\ V'_A \cdot (x_k - x_A) - H'_A \cdot (y_k - y_A), & x_k \leq x \leq l. \end{cases} \quad (1.30)$$

Значения V'_A определяются из (1.21), значения H'_A определяются из (1.23) и (1.24).

Выражения (1.26)–(1.28) с учетом (1.29) и (1.30) описывают линии влияния внутренних силовых факторов в заданном поперечном сечении арки.

2. Пример расчета трехшарнирной арки

2.1. Задание для расчета

Для заданной трехшарнирной системы, схема нагружения которой приведена на рис. 2.1, требуется:

1. Произвести кинематический анализ.
2. Определить реакции в опорах арки.
3. Определить значения и построить эпюры продольных сил, поперечных сил и изгибающих моментов в поперечных сечениях арки.
4. Для заданного сечения K построить линии влияния продольной силы, поперечной силы и изгибающего момента.
5. По линиям влияния определить внутренние силовые факторы в заданном сечении и сопоставить их со значениями на соответствующих эпюрах.

Исходные данные: $P = 70$ кН, $q = 80$ кН/м, $f = 5$ м, $l = 28$ м, $\beta = 0,75$, $x_k = 21$ м, $x_C = l/2 = 14$ м. Линия оси арки – дуга окружности (точка C и центр окружности лежат на одной вертикальной линии).

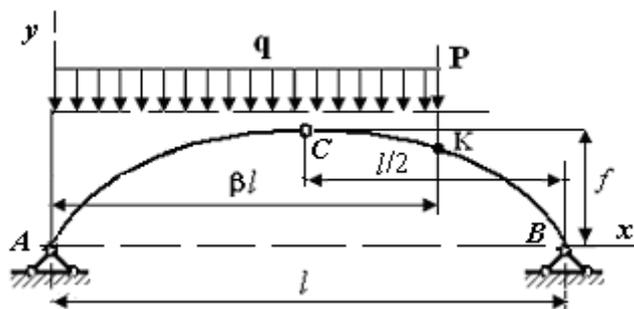


Рис. 2.1. Расчетная схема трехшарнирной арки

2.2. Кинематический анализ

Для того, чтобы образованная стержневая система была геометрически неизменяема, необходимо, чтобы число степеней свободы w системы было равно нулю. Число степеней свободы w стержневой системы, состоящей из n стержней, соединенных с помощью p шарниров, и имеющей C_0 опорных стержней, можно определить из (1.1) как

$$w = 3n - 2p - C_0.$$

Для системы из двух стержней арки ($n = 2$), соединенных одним шарниром ($p = 1$) и имеющих четыре опорных стержня $C_0 = 4$ (две шарнирно-неподвижные опоры, каждая из которых эквивалентна двум опорным стержням),

$$w = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 4 = 0,$$

т. е. трехшарнирная арка является геометрически неизменяемой системой.

Для определения неизвестных реакций необходимо, чтобы число уравнений равновесия было равно числу неизвестных. Для плоской системы сил из (1.3)

$$3n = C_0 + 2p.$$

Так как для геометрически неизменяемой трехшарнирной арки из (1.2) это условие обеспечивается, то поставленная задача по определению опорных реакций разрешима и трехшарнирная арка является статически определимой системой.

2.3. Определение реакций в опорах арки

При действии внешней нагрузки на трехшарнирную арку (рис. 2.2) в ее опорах возникают неизвестные реакции: V_A, H_A, V_B, H_B .

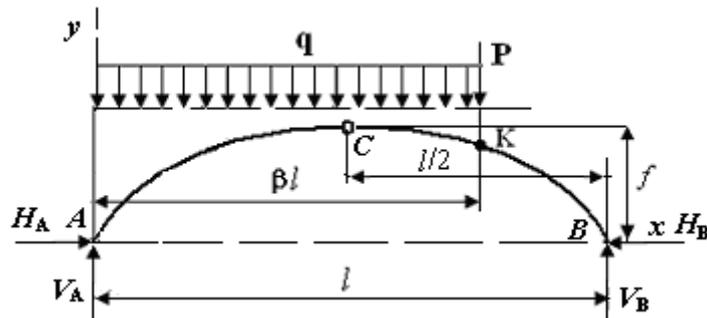


Рис. 2.2. Расчетная схема трехшарнирной арки для определения реакций в опорах

Для определения неизвестных реакций V_A, H_A, V_B, H_B вначале составляем для всей системы (рис. 2.2) три уравнения равновесия в виде равенства нулю суммы проекций всех сил на ось x ($\sum P_{ix} = 0$), в виде равенства нулю суммы моментов всех сил относительно точки A ($\sum M_A(P_i) = 0$), в виде равенства нулю суммы моментов всех сил относительно точки B $\sum M_B(P_i) = 0$:

$$\sum P_{ix} = 0, \quad H_A - H_B = 0, \quad H_B = H_A, \quad (2.1)$$

$$\sum M_A(P_i) = 0, \quad -q\beta l \cdot \frac{\beta l}{2} - P \cdot \beta l + V_B l = 0, \quad -80 \cdot 21 \cdot 10,5 - 70 \cdot 21 + V_B \cdot 28 = 0,$$

$$V_B = \frac{80 \cdot 21 \cdot 10,5 + 70 \cdot 21}{28} = \frac{19110}{28} = 682,5 \text{ кН}; \quad (2.2)$$

$$\sum M_B(P_i) = 0, \quad q\beta l(l - \frac{\beta l}{2}) + P(l - \beta l) - V_A l = 0, \quad 80 \cdot 21 \cdot 17,5 + 70 \cdot 7 - V_A \cdot 28 = 0,$$

$$V_A = \frac{80 \cdot 21 \cdot 17,5 + 70 \cdot 7}{28} = \frac{29890}{28} = 1067,5 \text{ кН}. \quad (2.3)$$

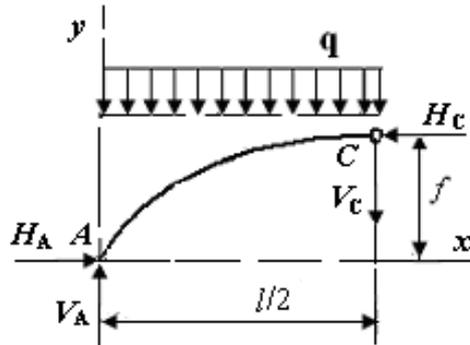


Рис. 2.3. Схема действия сил на левый стержень арки

Далее систему разделим на составные стержни и рассмотрим равновесие левого стержня (рис. 2.3) в виде равенства нулю суммы моментов сил, действующих на стержень, относительно точки C ($\sum M_C(P_i) = 0$):

$$\sum M_C(P_i) = 0, \quad H_A \cdot f + q \cdot 0,5l \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,5l - V_A \cdot 0,5l = 0,$$

$$H_A = (V_A \cdot 0,5l - q \cdot 0,5l \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,5l) / f = (1067,5 \cdot 14 - 80 \cdot 14 \cdot 7) / 5 = 1421 \text{ кН}.$$

Учитывая (2.1), находим, что $H_B = H_A = 1421 \text{ кН}$. (2.4)

2.4. Определение внутренних силовых факторов в поперечных сечениях арки. Построение эпюр продольных сил, поперечных сил и изгибающих моментов

2.4.1. Определение внутренних силовых факторов в вертикальных сечениях арки. Построение эпюр продольных сил, поперечных сил и изгибающих моментов

Если заданные силы и реакции в опорах представлены на расчетной схеме в виде вертикальных и горизонтальных составляющих (рис. 2.4), то для определения внутренних силовых факторов в произвольном i -м вертикальном сечении можно использовать схемы положительных слагаемых, представленных на рис. 1.11 для левой отсеченной части арки.

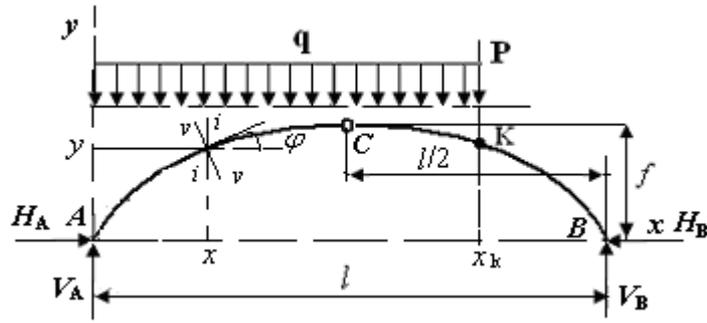


Рис. 2.4. Схема трехшарнирной арки для определения внутренних сил в сечениях арки

Координаты центра тяжести i -го сечения x и y . Тогда в соответствии со схемой положительных слагаемых (рис. 1.11) запишем

$$N_0 = -H_A = -1421 \text{ кН}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2.5)$$

$$Q_0 = \begin{cases} V_A - q \cdot x, & 0 \leq x \leq x_k, \\ V_A - q \cdot x_k - P, & x_k \leq x \leq l, \end{cases} \quad (2.6)$$

$$M_0 = \begin{cases} V_A \cdot x - q \cdot x \cdot x / 2 - H_A \cdot y, & 0 \leq x \leq x_k, \\ V_A \cdot x - q \cdot x_k (x - x_k / 2) - H_A \cdot y - P(x - x_k), & x_k \leq x \leq l. \end{cases} \quad (2.7)$$

Подставляя значения V_A, q, P, x_k, l , получим

$$Q_0 = \begin{cases} 1067,5 - 80 \cdot x, & 0 \leq x \leq 21, \\ 1067,5 - 80 \cdot 21 - 70, & 21 \leq x \leq 28, \end{cases} \quad (2.8)$$

$$M_0 = \begin{cases} 1067,5 \cdot x - 80 \cdot x^2 / 2 - 1421 \cdot y, & 0 \leq x \leq 21, \\ 1067,5 \cdot x - 80 \cdot 21(x - 10,5) - 1421 \cdot y - 70(x - 21), & 21 \leq x \leq 28. \end{cases} \quad (2.9)$$

При расчете M_0 возникает необходимость определения значения y в зависимости от x . По условию задания линия оси арки – дуга окружности. Используя схему, представленную на рис. 1.7, и формулу (1.12), находим радиус окружности R :

$$R = \frac{f}{2} + \frac{l^2}{8f} = 2,5 + \frac{28^2}{8 \cdot 5} = 2,5 + 19,6 = 22,1 \text{ м}. \quad (2.10)$$

Используя формулу (1.10), запишем

$$y = \sqrt{R^2 - (x - l/2)^2} - (R - f) = \sqrt{22,1^2 - (x - 14)^2} - 17,1. \quad (2.11)$$

Расчитаем значения y, N_0, Q_0, M_0 в зависимости от x по формулам (2.11), (2.5), (2.8) и (2.9). Расчетные значения внесем в таблицу 1. В табл. 1 для координаты сечения $x = 21$ м используются две строки, так как функция Q_0 в этом сечении имеет разрыв.

Таблица 1

Расчетные значения y , N_0 , Q_0 , M_0 в зависимости от положения вертикального сечения

Координата i -го сечения по оси x , м	Координата i -го сечения по оси y , м	Продольная сила в i -м сечении N_0 , кН	Поперечная сила в i -м сечении Q_0 , кН	Изгибающий момент в i -м сечении M_0 , кНм
0	0	-1421	1067,5	0
1	0,772045	-1421	987,5	-69,5762
2	1,458287	-1421	907,5	-97,2252
3	2,067942	-1421	827,5	-96,0456
4	2,60812	-1421	747,5	-76,1387
5	3,0844	-1421	667,5	-45,4323
6	3,501214	-1421	587,5	-10,2245
7	3,862109	-1421	507,5	24,44358
8	4,169932	-1421	427,5	54,52687
9	4,42696	-1421	347,5	76,79007
10	4,634995	-1421	267,5	88,67236
11	4,795433	-1421	187,5	88,18926
12	4,909316	-1421	107,5	73,86167
13	4,977364	-1421	27,5	44,66579
14	5	-1421	-52,5	0
15	4,977364	-1421	-132,5	-60,3342
16	4,909316	-1421	-212,5	-136,138
17	4,795433	-1421	-292,5	-226,811
18	4,634995	-1421	-372,5	-331,328
19	4,42696	-1421	-452,5	-448,21
20	4,169932	-1421	-532,5	-575,473
21	3,862109	-1421	-612,5	-710,556
21	3,862109	-1421	-682,5	-710,556
22	3,501214	-1421	-682,5	-880,224
23	3,0844	-1421	-682,5	-970,432
24	2,60812	-1421	-682,5	-976,139
25	2,067942	-1421	-682,5	-891,046
26	1,458287	-1421	-682,5	-707,225
27	0,772045	-1421	-682,5	-414,576
28	0	-1421	-682,5	0

На основе расчетных значений построим эпюры внутренних силовых факторов N_0 , Q_0 , M_0 в вертикальных сечениях арки (рис. 2.5).

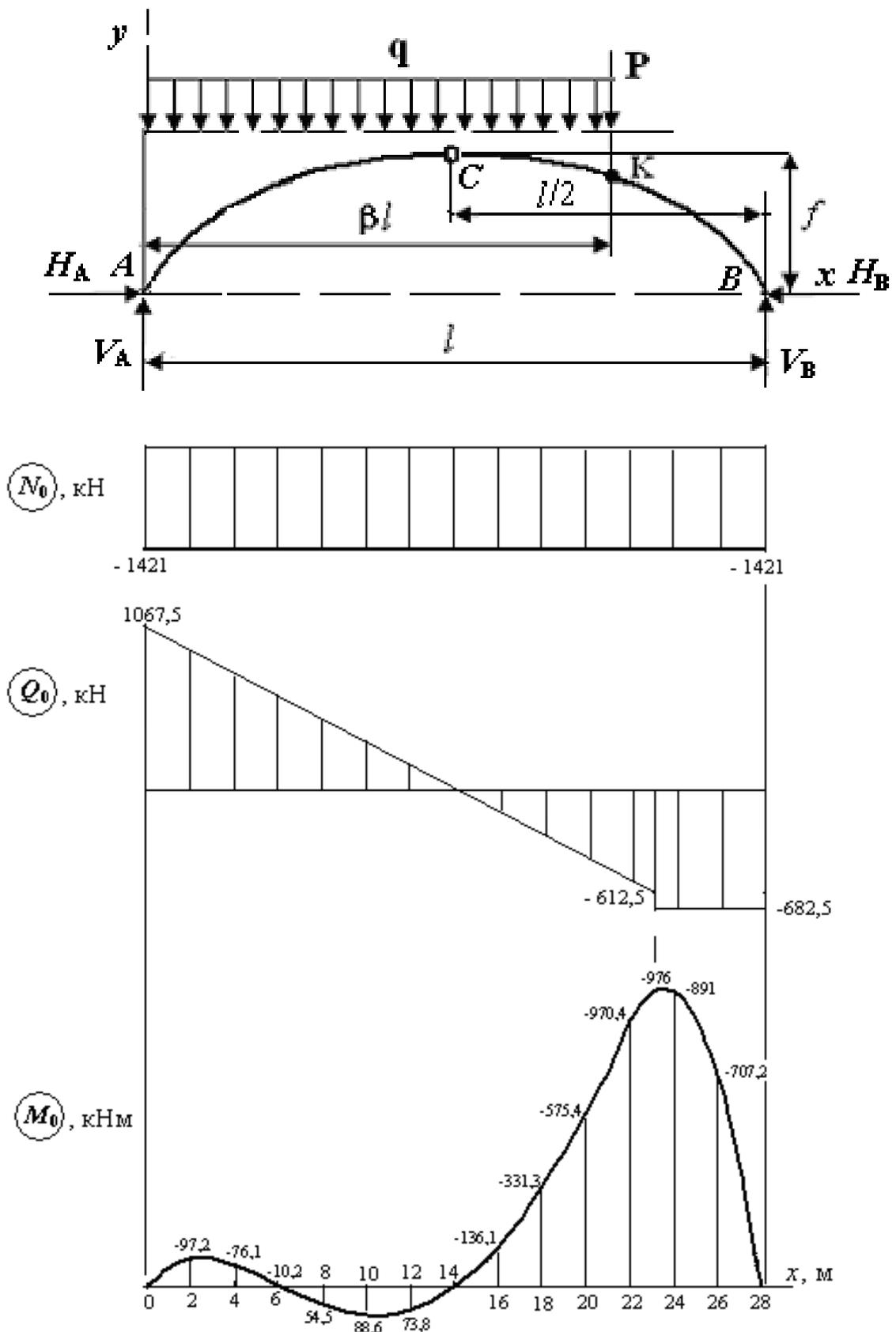


Рис. 2.5. Эпюры внутренних силовых факторов в вертикальных сечениях арки

2.4.2. *Определение внутренних силовых факторов в поперечных сечениях арки. Построение эпюр продольных сил, поперечных сил и изгибающих моментов*

После того, как определены внутренние силовые факторы в вертикальных сечениях, можно перейти к определению внутренних силовых факторов в поперечных сечениях $v-v$ арки, повернутых относительно соответствующих вертикальных сечений на угол φ .

Используя формулы (1.18), (1.19), (1.20), запишем выражения, определяющие продольные силы N , поперечные силы Q и изгибающие моменты M в поперечных сечениях арки:

$$N = N_0 \cos \varphi - Q_0 \sin \varphi, \quad (2.12)$$

$$Q = Q_0 \cos \varphi + N_0 \sin \varphi, \quad (2.13)$$

$$M = M_0, \quad (2.14)$$

где N_0 , Q_0 , M_0 – продольная сила, поперечная сила и изгибающий момент в вертикальном сечении; φ – угол наклона касательной в данной точке линии оси арки или угол между поперечным сечением арки и вертикальным сечением в данной точке линии оси арки (рис. 1.12).

Тангенс угла наклона касательной в данной точке линии оси арки равен первой производной функции $y = y(x)$ для этой точки. Линия оси арки – дуга окружности радиуса R . Тогда, используя (1.11)

$$y' = \frac{l/2 - x}{\sqrt{R^2 - (x - l/2)^2}},$$

известное равенство $\operatorname{tg} \varphi = y'$, а также соотношения, что

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}},$$

$$\sin \varphi = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \varphi},$$

получим после преобразований

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{R^2 - (l/2 - x)^2}}{R}, \quad \sin \varphi = \frac{l/2 - x}{R}. \quad (2.15)$$

Рассчитаем значения N , Q , M в поперечных сечениях арки в зависимости от x по формулам (2.12), (2.13), (2.14), (2.15) и (2.16). При вычислениях учитываем значения N_0 , Q_0 , M_0 , приведенные в таблице 1. Расчетные значения внесем в таблицу 2.

В табл. 2 для координаты сечения $x = 21$ м используются две строки, так как в этом сечении функции N и Q имеют разрывы.

Таблица 2

Расчетные значения N , Q , M в зависимости от положения поперечного сечения

Координата точки оси арки по оси x , м	Координата точки оси арки по оси y , м	Продольная сила в поперечном сечении N , кН	Поперечная сила в поперечном сечении Q , кН	Изгибающий момент в поперечном сечении $M = M_0$, кНм
0	0	-1775,75	-74,1968	0
1	0,772045	-1730,03	-37,3011	-69,5762
2	1,458287	-1686,03	-9,51832	-97,2252
3	2,067942	-1644,35	10,4286	-96,0456
4	2,60812	-1605,44	23,61176	-76,1387
5	3,0844	-1569,66	30,95416	-45,4323
6	3,501214	-1537,3	33,26755	-10,2245
7	3,862109	-1508,58	31,27919	24,44358
8	4,169932	-1483,69	25,6514	54,52687
9	4,42696	-1462,77	16,99631	76,79007
10	4,634995	-1445,95	5,887381	88,67236
11	4,795433	-1433,3	-7,1315	88,18926
12	4,909316	-1424,9	-21,5384	73,86167
13	4,977364	-1420,79	-36,8268	44,66579
14	5	-1421	-52,5	0
15	4,977364	-1425,54	-68,0656	-60,3342
16	4,909316	-1434,4	-83,0308	-136,138
17	4,795433	-1447,55	-96,8966	-226,811
18	4,634995	-1464,95	-109,153	-331,328
19	4,42696	-1486,53	-119,274	-448,21
20	4,169932	-1512,2	-126,708	-575,473
21	3,862109	-1541,84	-130,873	-710,556
21	3,862109	-1564,01	-197,269	-710,556
22	3,501214	-1571,69	-121,825	-880,224
23	3,0844	-1575,77	-44,654	-970,432
24	2,60812	-1576,03	34,3533	-976,139
25	2,067942	-1572,18	115,3339	-891,046
26	1,458287	-1563,86	198,4602	-707,225
27	0,772045	-1550,62	283,9515	-414,576
28	0	-1531,86	372,0928	0

На основе расчетных значений построим эпюры внутренних силовых факторов N , Q , M в поперечных сечениях арки (рис. 2.6).

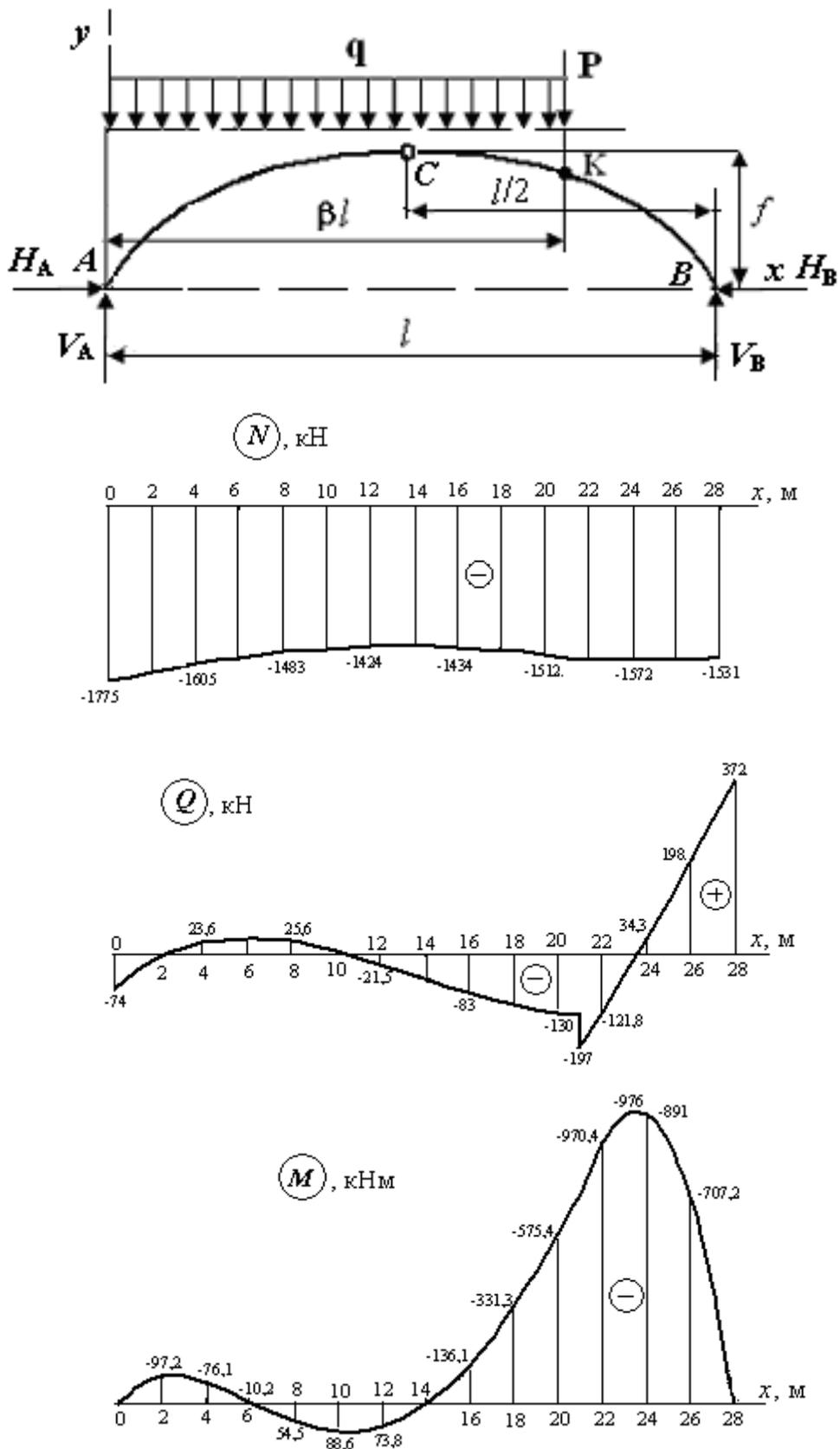


Рис. 2.6. Эпюры внутренних силовых факторов в поперечных сечениях арки

2.5. Линии влияния опорных реакций

При действии единичной силы в опорах возникают опорные реакции V'_A , H'_A , V'_B , H'_B (рис. 2.7).

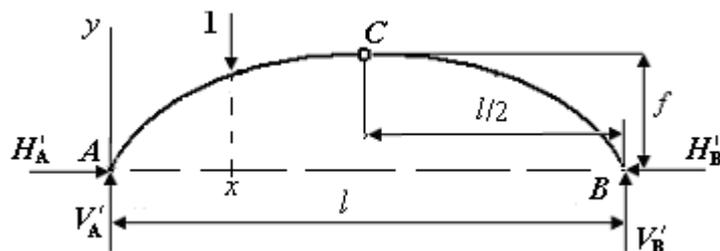


Рис. 2.7. Расчетная схема арки для определения реакций от действия единичной силы

Используя формулы (1.21), (1.22), (1.23), (1.24) и (1.25), запишем

$$V'_A = 1 - x/l, \quad (2.16)$$

$$V'_B = x/l, \quad (2.17)$$

$$H'_A = \begin{cases} \frac{V'_A \cdot l/2 - 1 \cdot (l/2 - x)}{f}, & 0 \leq x \leq l/2, \\ H'_A = \frac{V'_A \cdot l/2}{f}, & l/2 \leq x \leq l, \end{cases} \quad (2.18)$$

$$H'_B = H'_A.$$

Рассчитаем значения опорных реакций V'_A , H'_A , V'_B , H'_B в зависимости от положения единичной силы (координаты x). Расчетные значения при $l = 28$ м, $f = 5$ м приведем в таблице 3.

Таблица 3

Расчетные значения опорных реакций V'_A , H'_A , V'_B , H'_B

Координата, определяющая положение единичной силы по оси x , м	Значение опорной реакции V'_A	Значение опорной реакции H'_A	Значение опорной реакции V'_B	Значение опорной реакции H'_B
0	1	0	0	0
3,5	0,875	0,35	0,125	0,35
7	0,75	0,7	0,25	0,7
10,5	0,625	1,05	0,375	1,05
14	0,5	1,4	0,5	1,4
17,5	0,375	1,05	0,625	1,05
21	0,25	0,7	0,75	0,7
28	0	0	1	0

По расчетным значениям построим линии влияния опорных реакций V'_A , H'_A , V'_B , H'_B (рис. 2.8).

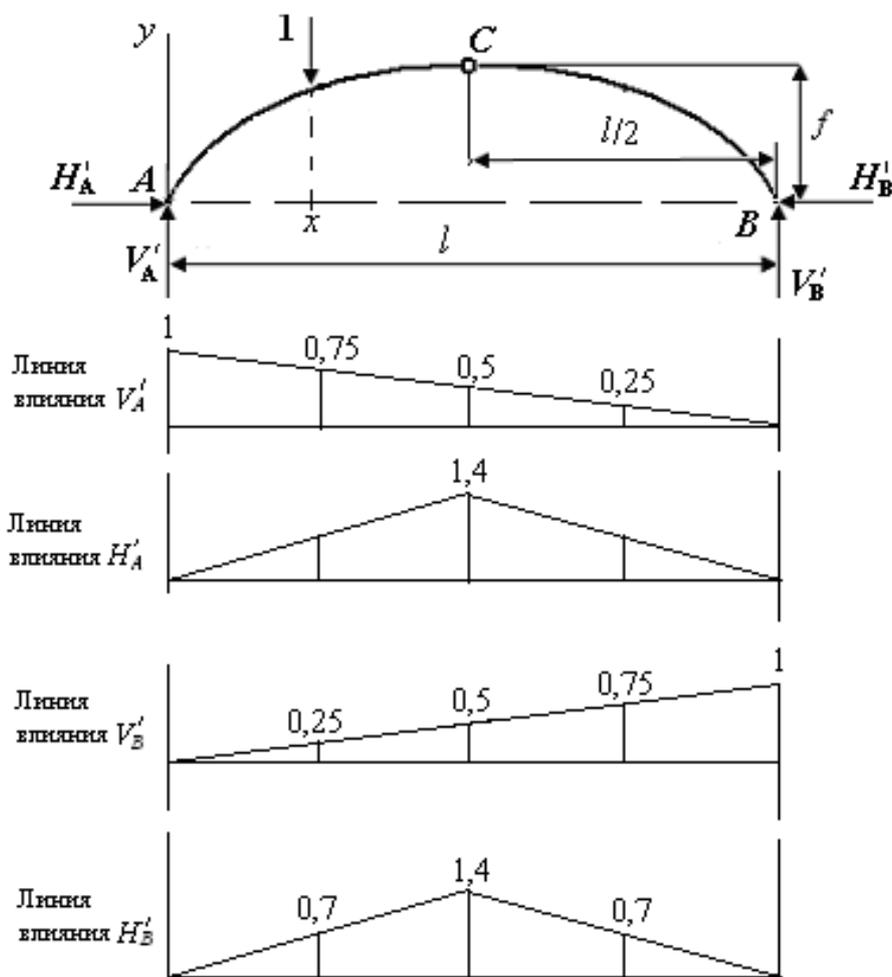


Рис. 2.8. Линии влияния опорных реакций трехшарнирной арки

2.6. Линии влияния продольной силы, поперечной силы и изгибающего моментов для заданного сечения арки

При перемещении единичной силы по арке в поперечных сечениях арки возникают внутренние силы: продольные силы N' , поперечные силы Q' , изгибающие моменты M' . Рассмотрим последовательность определения N'_k , Q'_k , M'_k в поперечном сечении, пересекающем ось арки в точке K (рис. 2.9).

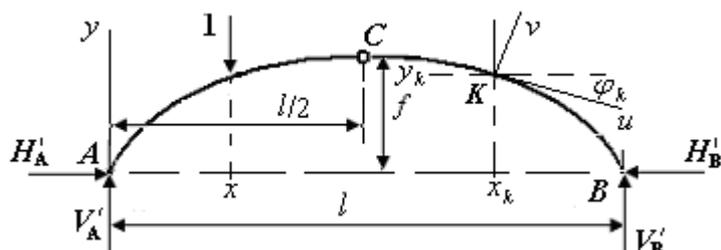


Рис. 2.9. Схема для определения внутренних сил в заданном сечении арки от действия единичной силы

Координаты точки K равны x_k и y_k . Нормаль к поперечному сечению составляет с горизонтальной линией угол φ_k .

Для определения N'_k , Q'_k , M'_k в поперечном сечении, пересекающем ось арки в точке K , воспользуемся уравнениями (1.26), (1.27) и (1.28) в виде

$$N'_k = N'_{k0} \cos \varphi_k - Q'_{k0} \sin \varphi_k, \quad (2.19)$$

$$Q'_k = Q'_{k0} \cos \varphi_k + N'_{k0} \sin \varphi_k, \quad (2.20)$$

$$M'_k = M'_{k0}, \quad (2.21)$$

где N'_{k0} , Q'_{k0} – продольная и поперечная силы в вертикальном сечении точки K , возникающие от действия единичной силы при перемещении ее по арке; M'_{k0} – изгибающий момент в вертикальном сечении точки K , возникающий от действия единичной силы при перемещении ее по арке.

Внутренние силы N'_{k0} , Q'_{k0} и M'_{k0} в вертикальном сечении точки K определим по формулам (1.29) и (1.30) с учетом, что $x_A = 0$ и $y_A = 0$, используя схему положительных слагаемых на рис. 1.11:

$$N'_{k0} = -H'_A, \quad H'_A = \begin{cases} \frac{V'_A \cdot l/2 - 1 \cdot (l/2 - x)}{f}, & 0 \leq x \leq l/2, \\ H'_A = \frac{V'_A \cdot l/2}{f}, & l/2 \leq x \leq l, \end{cases} \quad (2.22)$$

$$Q'_{k0} = \begin{cases} V'_A - 1, & 0 \leq x \leq x_k, \\ V'_A, & x_k \leq x \leq l, \end{cases} \quad (2.23)$$

$$M'_{k0} = \begin{cases} V'_A \cdot x_k - H'_A \cdot y_k - 1 \cdot (x_k - x), & 0 \leq x \leq x_k, \\ V'_A \cdot x_k - H'_A \cdot y_k, & x_k \leq x \leq l. \end{cases} \quad (2.24)$$

Значения V'_A и H'_A определяются из (2.16) и (2.18).

Выражения (2.19)–(2.21) с учетом (2.22), (2.23) и (2.24) описывают линии влияния внутренних силовых факторов N'_k , Q'_k , M'_k в заданном поперечном сечении арки.

Рассчитаем вначале значения внутренних силовых факторов N'_{k0} , Q'_{k0} и M'_{k0} в вертикальном сечении точки K в зависимости от положения единичной силы (координаты x).

Расчетные значения N'_{k0} , Q'_{k0} и M'_{k0} при $l = 28$ м, $f = 5$ м, $x_k = 21$ м, $y_k = 3,862$ м приведём в таблице 4.

В табл. 4 для координаты сечения $x = 21$ м используются две строки, так как функция Q'_{k0} в этом сечении имеет разрыв.

Таблица 4

Расчетные значения внутренних силовых факторов N'_{k0} , Q'_{k0} и M'_{k0} в вертикальном сечении точки K ($x_k = 21$ м, $y_k = 3,862$ м)

Координата, определяющая положение единичной силы по оси x , м	Значение опорной реакции V'_A	Значение продольной силы N'_{k0}	Значение поперечной силы Q'_{k0}	Значение изгибающего момента M'_{k0}
0	1	0	0	0
1	1	-0,1	-0,03571	-0,1362
2	0,964286	-0,2	-0,07143	-0,2724
3	0,928571	-0,3	-0,10714	-0,4086
4	0,892857	-0,4	-0,14286	-0,5448
5	0,857143	-0,5	-0,17857	-0,681
6	0,821429	-0,6	-0,21429	-0,8172
7	0,75	-0,7	-0,25	-0,9534
8	0,714286	-0,8	-0,28571	-1,0896
9	0,678571	-0,9	-0,32143	-1,2258
10	0,642857	-1	-0,35714	-1,362
11	0,607143	-1,1	-0,39286	-1,4982
12	0,571429	-1,2	-0,42857	-1,6344
13	0,535714	-1,3	-0,46429	-1,7706
14	0,5	-1,4	-0,5	-1,9068
15	0,464286	-1,3	-0,53571	-1,2706
16	0,428571	-1,2	-0,57143	-0,6344
17	0,392857	-1,1	-0,60714	0,0018
18	0,357143	-1	-0,64286	0,638
19	0,321429	-0,9	-0,67857	1,2742
20	0,285714	-0,8	-0,71429	1,9104
21	0,25	-0,7	-0,75	2,5466
21	0,25	-0,7	0,25	2,5466
22	0,214286	-0,6	0,214286	2,1828
23	0,178571	-0,5	0,178571	1,819
24	0,142857	-0,4	0,142857	1,4552
25	0,107143	-0,3	0,107143	1,0914
26	0,071429	-0,2	0,071429	0,7276
27	0,035714	-0,1	0,035714	0,3638
28	0	0	0	0

По расчетным значениям построим линии влияния внутренних силовых факторов N'_{k0} , Q'_{k0} и M'_{k0} (рис. 2.10) в вертикальном сечении точки K в зависимости от положения единичной силы (координаты x).

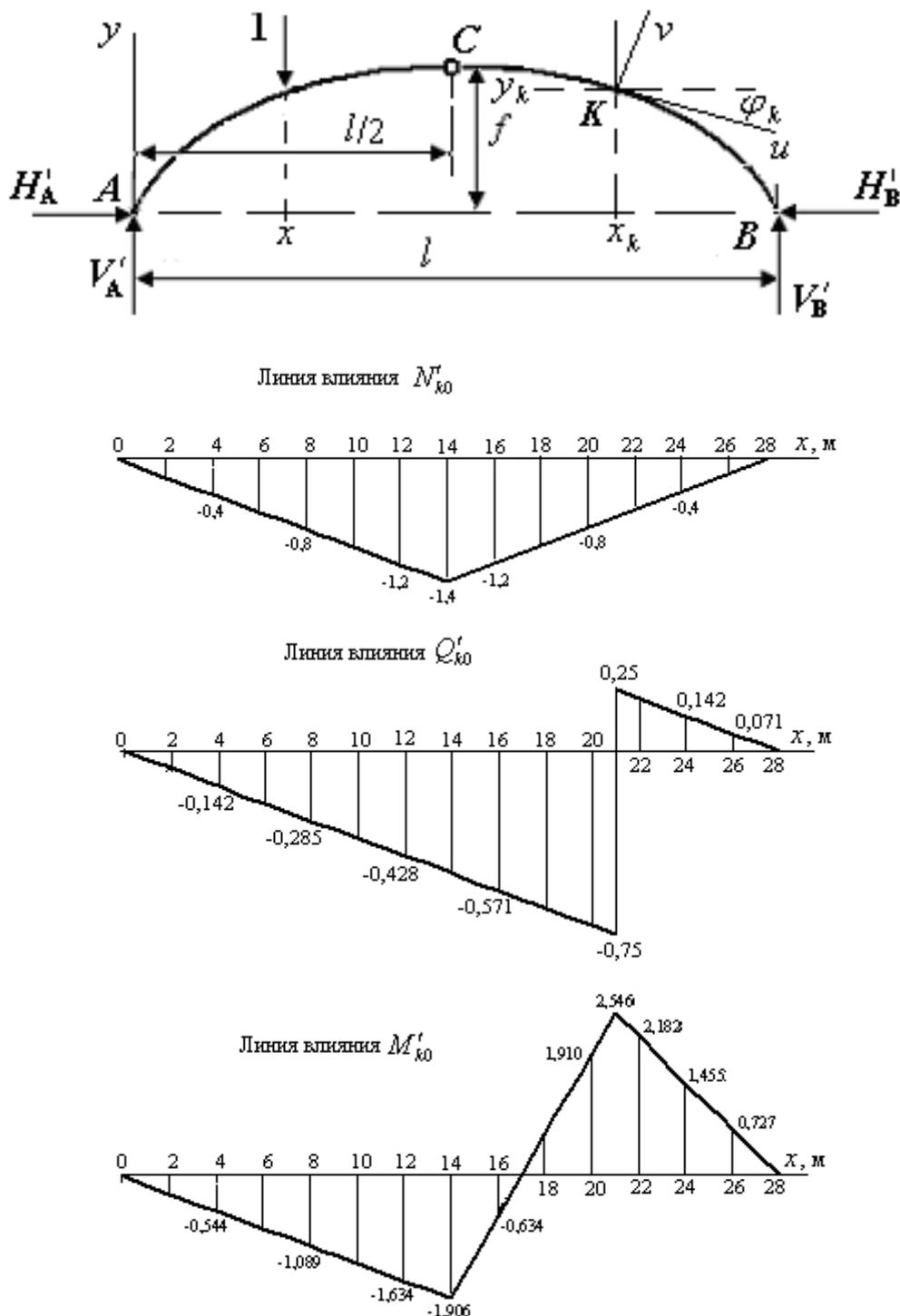


Рис. 2.10. Линии влияния внутренних силовых факторов N'_{k0} , Q'_{k0} и M'_{k0} в вертикальном сечении точки K ($x_k = 21$ м, $y_k = 3,862$ м)

По формулам (2.19) – (2.21) с учетом (2.22), (2.23) и (2.24) рассчитаем значения внутренних силовых факторов N'_k , Q'_k и M'_k в поперечном сечении точки K в зависимости от положения единичной силы (координаты x).

Расчетные значения N'_k , Q'_k и M'_k при $l = 28$ м, $f = 5$ м, $x_k = 21$ м, $y_k = 3,862$ м, $\sin \varphi_k = -0,31674$, $\cos \varphi_k = 0,948512$ приведём в таблице 5.

В табл. 5 для координаты сечения $x = 21$ м используются две строки, так как в этом сечении функции N'_k и Q'_k имеют разрывы.

Таблица 5

Расчетные значения внутренних силовых факторов N'_k , Q'_k и M'_k в поперечном сечении точки $K (x_k = 21$ м, $y_k = 3,862$ м, $\sin \varphi_k = -0,31674$, $\cos \varphi_k = 0,948512)$

Координата, определяющая положение единичной силы по оси x , м	Значение опорной реакции V'_A	Значение продольной силы N'_k	Значение поперечной силы Q'_k	Значение изгибающего момента M'_k
0	1	0	0	0
1	1	-0,10616	-0,0022	-0,1362
2	0,964286	-0,21233	-0,0044	-0,2724
3	0,928571	-0,31849	-0,0066	-0,4086
4	0,892857	-0,42465	-0,0088	-0,5448
5	0,857143	-0,53082	-0,01101	-0,681
6	0,821429	-0,63698	-0,01321	-0,8172
7	0,75	-0,74314	-0,01541	-0,9534
8	0,714286	-0,84931	-0,01761	-1,0896
9	0,678571	-0,95547	-0,01981	-1,2258
10	0,642857	-1,06163	-0,02201	-1,362
11	0,607143	-1,1678	-0,02421	-1,4982
12	0,571429	-1,27396	-0,02641	-1,6344
13	0,535714	-1,38012	-0,02862	-1,7706
14	0,5	-1,48629	-0,03082	-1,9068
15	0,464286	-1,40275	-0,09637	-1,2706
16	0,428571	-1,31921	-0,16192	-0,6344
17	0,392857	-1,23567	-0,22747	0,0018
18	0,357143	-1,15213	-0,29302	0,638
19	0,321429	-1,06859	-0,35857	1,2742
20	0,285714	-0,98505	-0,42411	1,9104
21	0,25	-0,90151	-0,48966	2,5466
21	0,25	-0,58477	0,458847	2,5466
22	0,214286	-0,50123	0,393298	2,1828
23	0,178571	-0,41769	0,327748	1,819
24	0,142857	-0,33416	0,262199	1,4552
25	0,107143	-0,25062	0,196649	1,0914
26	0,071429	-0,16708	0,131099	0,7276
27	0,035714	-0,08354	0,06555	0,3638
28	0	0	0	0

По расчетным значениям построим линии влияния внутренних силовых факторов N'_k , Q'_k и M'_k (рис. 2.11) в поперечном сечении точки K в зависимости от положения единичной силы (координаты x).

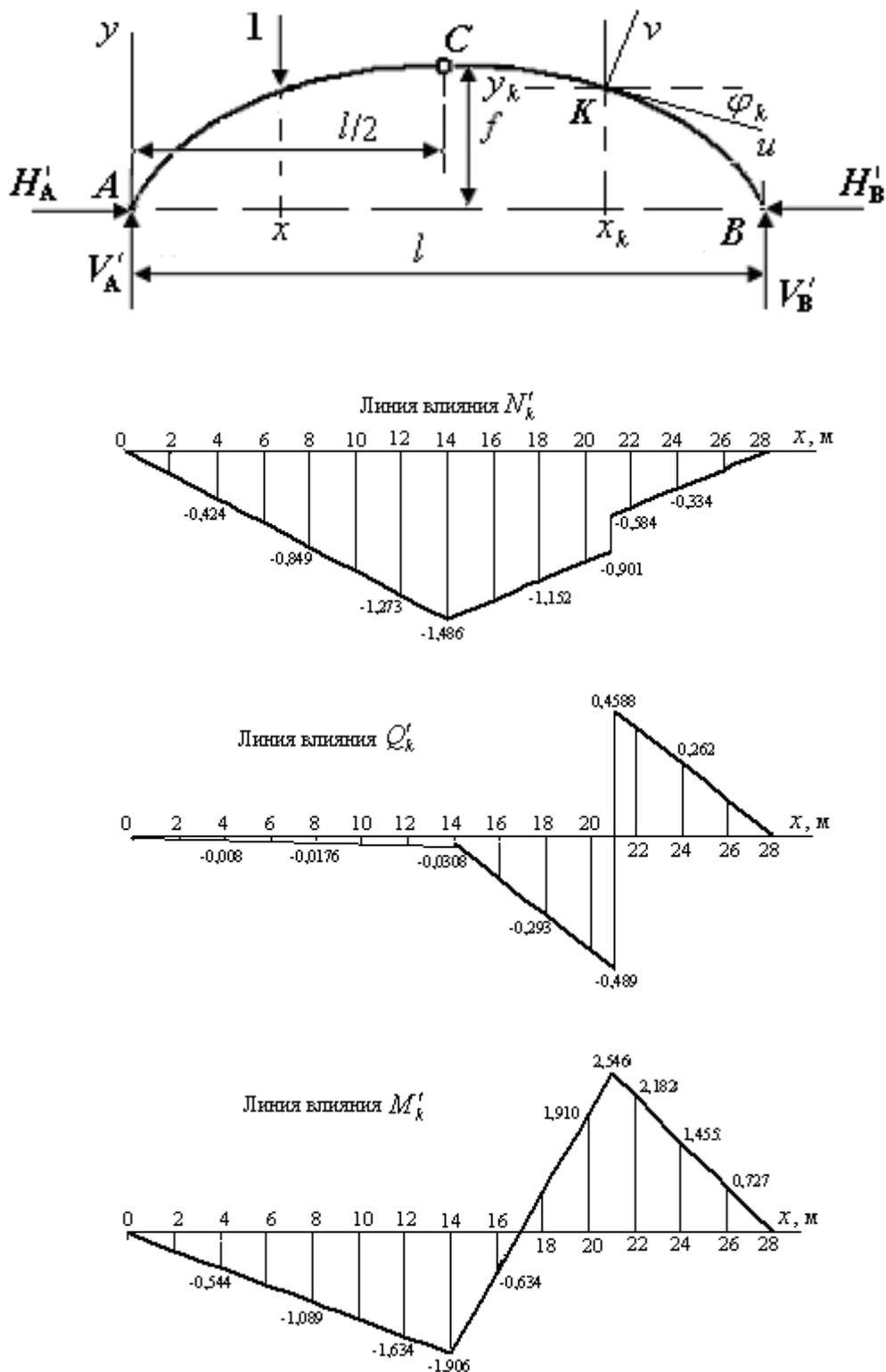


Рис. 2.11. Линии влияния внутренних силовых факторов N'_k , Q'_k и M'_k в поперечном сечении точки K ($x_k = 21$ м, $y_k = 3,862$ м, $\sin \varphi_k = -0,31674$, $\cos \varphi_k = 0,948512$)

2.7. Определение усилий по линиям влияния и сопоставление с аналитическими данными

2.7.1. Определение реакций опор по линиям влияния

Для определения опорных реакций по линиям влияния необходимо представить расчетную схему арки и линии влияния опорных реакций (рис. 2.12).

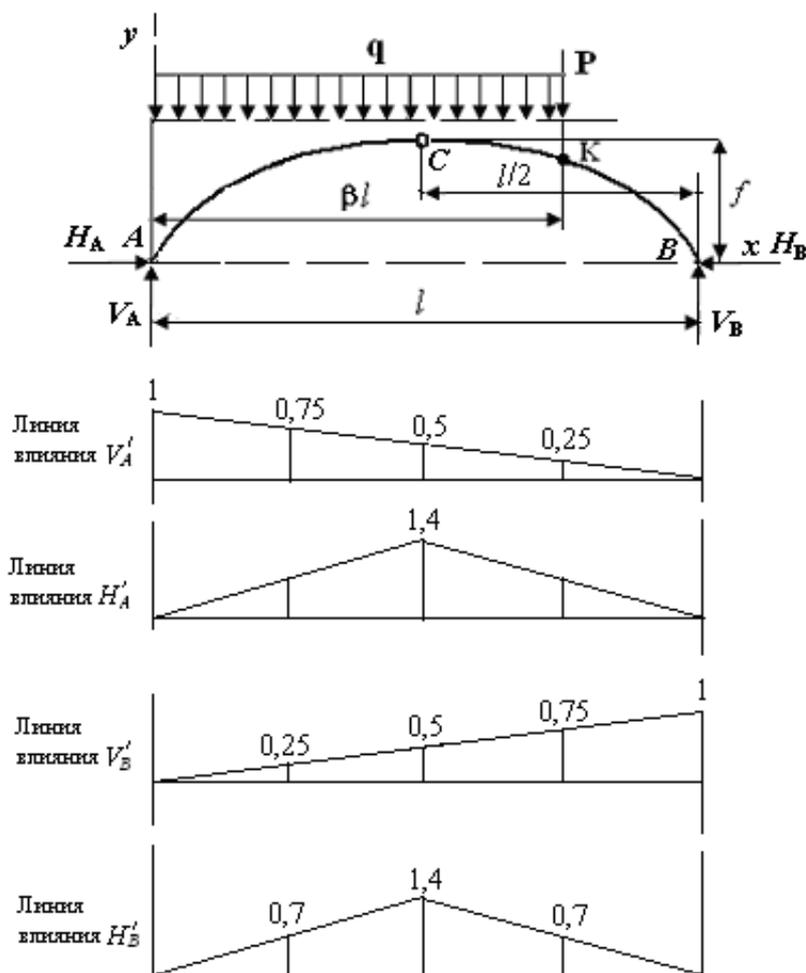


Рис. 2.12. Расчетная схема арки и линии влияния опорных реакций

Вертикальная составляющая V_A реакции в опоре A определится как

$$V_A = \sum P_i \cdot V'_A(x_{p_i}) + \sum q_j \cdot \omega_j, \quad (2.25)$$

где P_i – значение i -й силы, $V'_A(x_{p_i})$ – ордината линии влияния V'_A в точке приложения силы P_i ; q_j – интенсивность распределенной нагрузки, ω_j – площадь j -го участка линии влияния V'_A , расположенного в пределах распределенной нагрузки.

При перемножении значение силы P_i будет положительным сомножителем, если направление силы совпадает с направлением единичной силы. Если направление силы не совпадает с направлением единичной силы, то при перемножении значение силы P_i принимается со знаком минус.

Для схемы, представленной на рис. 2.12, $P = 70$ кН, $V'_A(x_{p_i}) = 0,25$, $q = 80$ кН/м, $\omega = \frac{1+0,25}{2} \cdot 21 = 13,125$ м. Подставляя в (2.25), получим

$$V'_A = 70 \cdot 0,25 + 80 \cdot 13,125 = 1067,5 \text{ кН.}$$

Горизонтальная составляющая H_A реакции в опоре A определится как

$$H_A = \sum P_i \cdot H'_A(x_{p_i}) + \sum q_j \cdot \omega_j, \quad (2.26)$$

где P_i – значение i -й силы, $H'_A(x_{p_i})$ – ордината линии влияния H'_A в точке приложения силы P_i ; q_j – интенсивность распределенной нагрузки, ω_j – площадь j -го участка линии влияния H'_A , расположенного в пределах распределенной нагрузки.

Для схемы, представленной на рис. 2.12, $P = 70$ кН, $H'_A(x_{p_i}) = 0,7$, $q = 80$ кН/м, $\omega = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 1,4 + \frac{1,4+0,7}{2} \cdot 7 = 9,8 + 7,35 = 17,15$ м. Подставляя в (2.26), получим

$$H'_A = 70 \cdot 0,7 + 80 \cdot 17,15 = 1421 \text{ кН.}$$

Вертикальная составляющая V_B реакции в опоре B определится как

$$V_B = \sum P_i \cdot V'_B(x_{p_i}) + \sum q_j \cdot \omega_j, \quad (2.27)$$

где P_i – значение i -й силы, $V'_B(x_{p_i})$ – ордината линии влияния V'_B в точке приложения силы P_i ; q_j – интенсивность распределенной нагрузки, ω_j – площадь j -го участка линии влияния V'_B , расположенного в пределах распределенной нагрузки.

Для схемы, представленной на рис. 2.12, $P = 70$ кН, $V'_B(x_{p_i}) = 0,75$, $q = 80$ кН/м, $\omega = \frac{1}{2} \cdot 21 \cdot 0,75 = 7,875$ м. Подставляя в (2.27), получим

$$V'_B = 70 \cdot 0,75 + 80 \cdot 7,875 = 52,5 + 630 = 682,5 \text{ кН.}$$

2.7.2. Определение по линиям влияния значений продольной силы, поперечной силы и изгибающего момента в заданном сечении

Представим расчетную схему арки и линии влияния внутренних силовых факторов N'_k , Q'_k и M'_k в поперечном сечении точки K в зависимости от положения единичной силы (рис. 2.13).

Продольная сила N_k в поперечном сечении точки K оси арки определится как

$$N_k = \sum P_i \cdot N'_k(x_{p_i}) + \sum q_j \cdot \omega_j, \quad (2.28)$$

где P_i – значение i -й силы, $N'_k(x_{p_i})$ – ордината линии влияния N'_k в точке приложения силы P_i ; q_j – интенсивность распределенной нагрузки, ω_j – площадь j -го участка линии влияния N'_k , расположенного в пределах распределенной нагрузки (на рис. 2.13 это затененная площадь линии влияния N'_k).

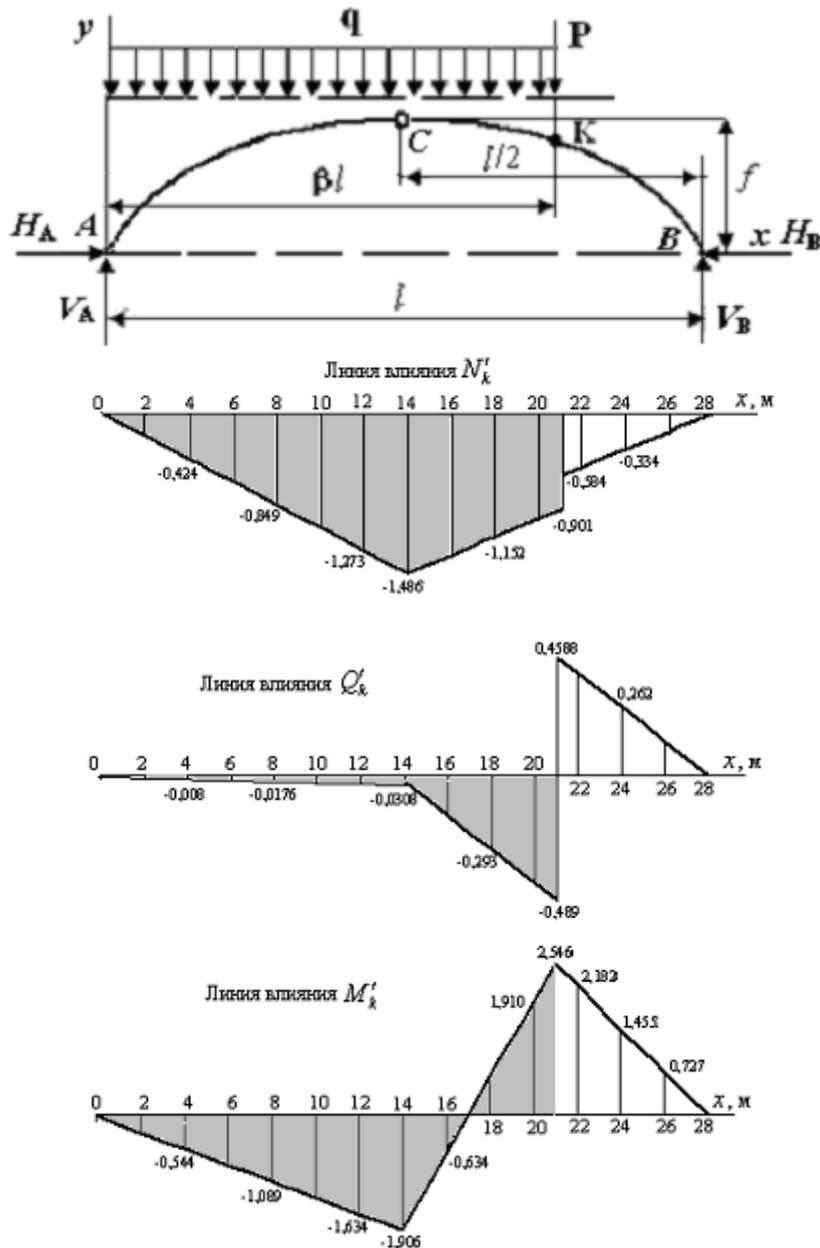


Рис. 2.13. Расчетная схема арки и линии влияния внутренних силовых факторов N'_k , Q'_k и M'_k в поперечном сечении точки K

Для схемы, представленной на рис. 2.13, $P = 70$ кН, $N'_k(x_{p_i}) = -0,584$,
 $q = 80$ кН/м, $\omega = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot (-1,486) + \frac{-1,486 - 0,901}{2} \cdot 7 = -10,4 - 8,351 = -18,751$ м.

Подставляя в (2.28), получим

$$N_k = 70 \cdot (-0,584) + 80 \cdot (-18,751) = -40,88 - 1500,08 = -1541 \text{ кН.}$$

Поперечная сила Q_k в поперечном сечении точки K оси арки определится как

$$Q_k = \sum P_i \cdot Q'_k(x_{p_i}) + \sum q_j \cdot \omega_j, \quad (2.29)$$

где P_i – значение i -й силы, $Q'_k(x_{p_i})$ – ордината линии влияния Q'_k в точке приложения силы P_i ; q_j – интенсивность распределенной нагрузки, ω_j – площадь j -го участка линии влияния Q'_k , расположенного в пределах распределенной нагрузки (на рис. 2.13 это затененная площадь линии влияния Q'_k).

Для схемы, представленной на рис. 2.13, $P = 70$ кН, $Q'_k(x_{p_i}) = 0,4588$,

$$q = 80 \text{ кН/м}, \quad \omega = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot (-0,0308) + \frac{-0,0308 - 0,489}{2} \cdot 7 = -0,2156 - 1,82 = -2,035 \text{ м.}$$

Подставляя в (2.29), получим

$$Q_k = 70 \cdot 0,4588 + 80 \cdot (-2,035) = 32,11 - 162,8 = -130,69 \text{ кН.}$$

Изгибающий момент M_k в поперечном сечении точки K оси арки определится как

$$M_k = \sum P_i \cdot M'_k(x_{p_i}) + \sum q_j \cdot \omega_j, \quad (2.30)$$

где P_i – значение i -й силы, $M'_k(x_{p_i})$ – ордината линии влияния M'_k в точке приложения силы P_i ; q_j – интенсивность распределенной нагрузки, ω_j – площадь j -го участка линии влияния M'_k , расположенного в пределах распределенной нагрузки (на рис. 2.13 это затененная площадь линии влияния M'_k).

Для схемы, представленной на рис. 2.13, $P = 70$ кН, $M'_k(x_{p_i}) = 2,546$,

$$q = 80 \text{ кН/м}, \quad \omega = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot (-1,906) + \frac{-1,906 + 2,546}{2} \cdot 7 = -13,347 + 2,24 = -11,107 \text{ м.}$$

Подставляя в (2.30), получим

$$M_k = 70 \cdot 2,546 + 80 \cdot (-11,107) = 178,22 - 888,6 = -710,38 \text{ кНм.}$$

Сопоставляя табличные значения (см. табл. 2) для сечения $x = 21$ м с результатами вычислений продольной силы N_k , поперечной силы Q_k и изгибающего момента M_k для заданного сечения точки K ($x_k = 21$ м) по соответствующим линиям влияния, устанавливаем их соответствие.

Результаты аналитических вычислений продольной силы N_k , поперечной силы Q_k и изгибающего момента M_k для заданного сечения точки K ($x_k = 21$ м) и результаты вычислений этих факторов по линиям влияния приведем в таблице 6.

Значения продольной силы N_k , поперечной силы Q_k и изгибающего момента M_k
для заданного сечения точки K ($x_k = 21$ м)

Способы вычисления	Внутренние силовые факторы в заданном сечении		
	N_k , кН	Q_k , кН	M_k , кНм
На основе уравнений равновесия	- 1541,84	- 130,873	- 710,556
Расчет по линиям влияния	- 1541	- 130,69	- 710,38

Различие в результатах вычислений для продольной силы N_k составляет 0,05 %, для поперечной силы Q_k 0,13 %, для изгибающего момента M_k 0,02 %.

РЕКОМЕНДУЕМЫЙ СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дарков, А. В. Строительная механика / А. В. Дарков, Н. Н. Шапошников. – М. : Высш. шк., 1986. – 607 с.
2. Дарков, А. В. Строительная механика / А. В. Дарков, Н. Н. Шапошников. – СПб. : Лань, 2004. – 656 с.
3. Снитко, Н. К. Строительная механика / Н. К. Снитко. – М. : Высш. шк., 1989. – 187 с.
4. Клейн, Г. К. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики / Г. К. Клейн, В. Г. Рекач, Г. И. Розенблат. – М. : Высш. шк., 1978. – 318 с.
5. Манжосов, В. К. Расчетно-проектировочные и контрольные задания по строительной механике (для студентов ЗВФ) : методические указания / В. К. Манжосов. – Ульяновск : УлГТУ, 2006. – 28 с.
6. Черная, С. В. Расчет трехшарнирной системы : методические указания / С. В. Черная, А. Н. Черный. – Ульяновск : УлГТУ, 1995. – 16 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Задание 2. Расчет трехшарнирной системы

Техническое задание.

Для заданной трехшарнирной системы, схемы нагружения которой приведены на рис. П1 – П2, а исходные данные представлены в таблице 7, требуется:

1. Произвести кинематический анализ.
2. Определить реакции в опорах арки.
3. Определить значения и построить эпюры продольных сил, поперечных сил и изгибающих моментов в поперечных сечениях арки.
4. Для заданного сечения построить линии влияния продольной силы, поперечной силы и изгибающего момента.
5. По линиям влияния определить внутренние силовые факторы в заданном сечении и сопоставить их со значениями на соответствующих эпюрах.

Таблица 7

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ
к расчетно-проектировочному заданию
«Расчет трехшарнирной системы»

Параметры	Номер столбца			
	1	2	3	4
Сила P , кН	20	15	10	25
Интенсивность распределенных сил q , кН/м	15	20	10	25
Длина пролета трехшарнирной системы l , м	20	15	16	20
Высота стрелы подъема трехшарнирной системы f , м	4	6	5	4
Коэффициент α	0,2	0,2	0,3	0,2
Коэффициент β	0,3	0,4	0,4	0,3

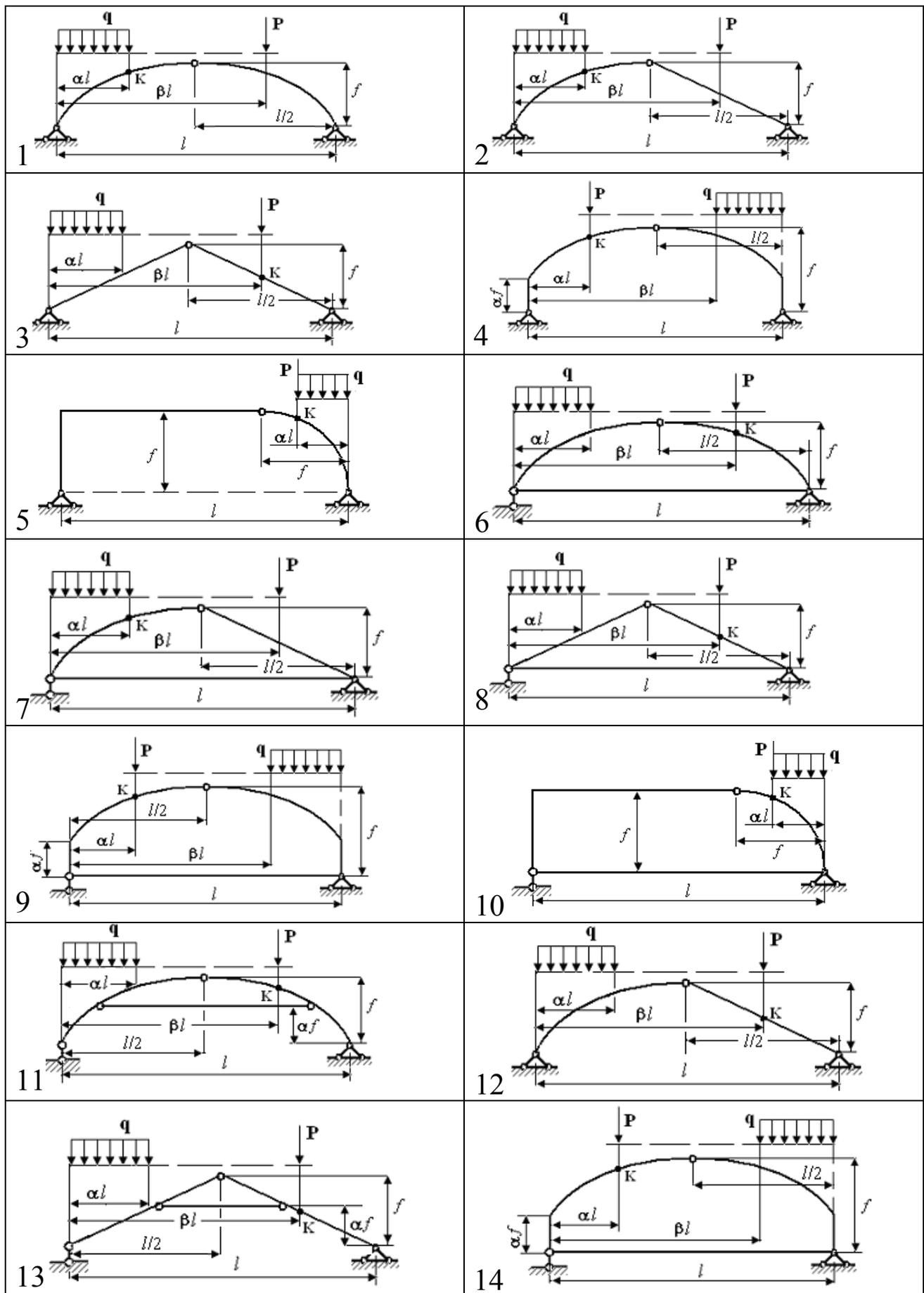


Рис. П1

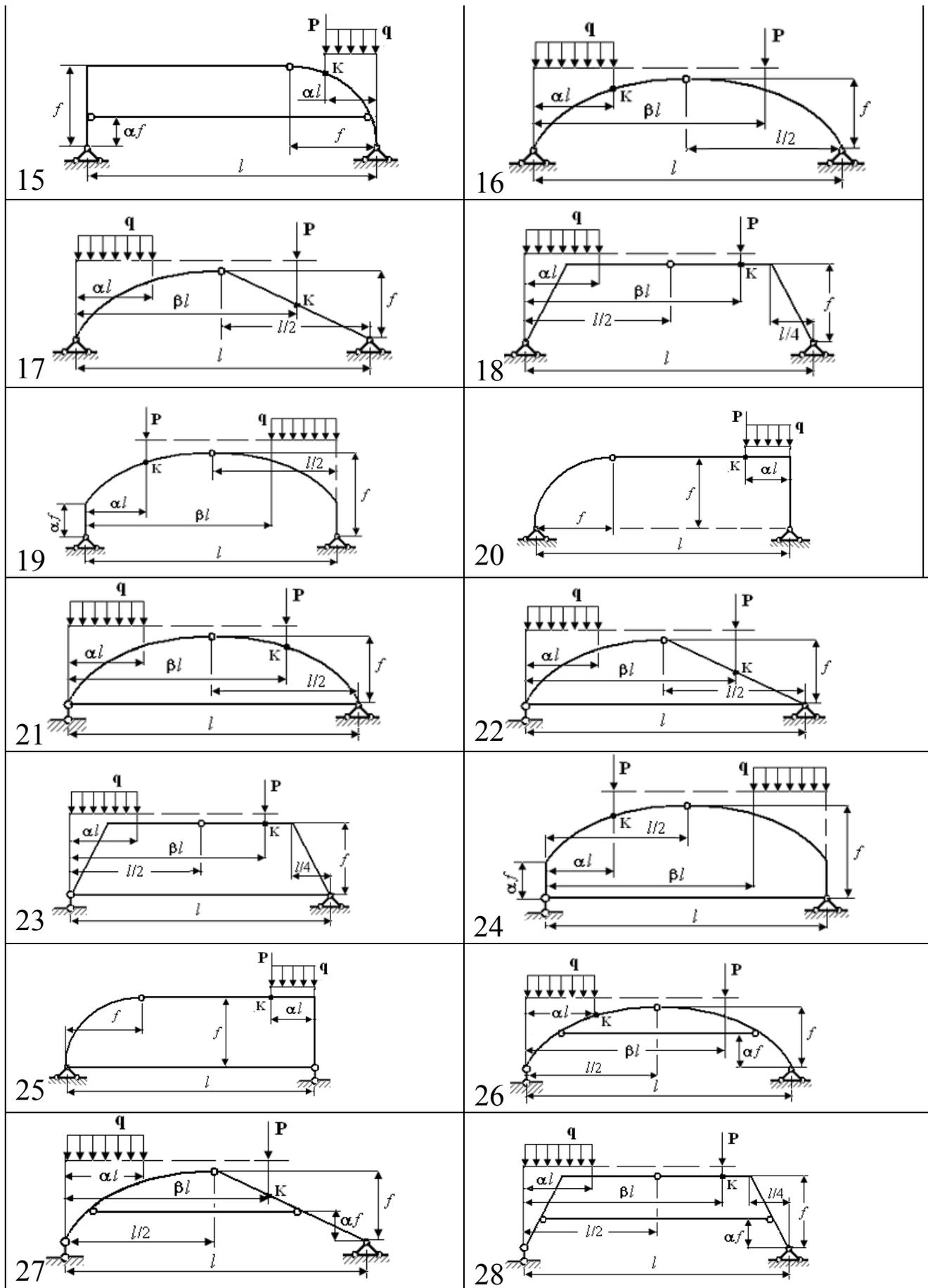


Рис. П2